Mémoire en groupe 5

Mathématiques

Titre :

La relation qui existe entre π et la distribution des nombre premiers.

Question de recherche :

Quelle est la relation entre π, la série de Leibniz et la distribution des nombres premiers ?

Nombre de mots : 3747

Session de mai 2020

TABLE DES MATIÈRES

1 INTRODUCTION

La constante π est un nombre que les mathématiciens et les scientifiques trouvent partout dans beaucoup de domaines, comme la probabilité, l'astronomie et la physique quantique. Une de ses apparitions qui semble étrange est son apparence dans la théorie des nombres avec la distribution des nombres premiers, ce qui pousse à poser la question « Quelle est la relation entre π, la série de Leibniz et la distribution des nombres premiers ? ». Ce mémoire va donc explorer le rôle de la distribution des nombres premiers pour exprimer π et la relation entre les deux. Ce mémoire va également explorer certaines propriétés de π comme son irrationalité, l'approximation d'Archimède de π et aussi le calcul infinitésimal, notamment la série de Leibniz, pour pouvoir établir des connaissances préliminaires afin d'explorer la méthode de Grant Sanderson, qui a pu relier π entre la distribution des nombres premiers. Cette question de recherche est pertinente car elle permet de voir π à travers nouveau point de vue. En plus, la distribution des nombres premiers est un sujet contemporain qui est l'essence de la cryptographie qui est en voie de développement. En autre mots, cette investigation contribue à l'exploration de la distribution des nombres premiers.

J'ai choisi ce sujet car je voudrai avoir une carrière d'un ingénieur d'ordinateur, notamment dans la sécurité virtuelle et la cryptographie, cette exploration jouera donc le rôle d'une introduction dans le domaine de la cryptographie mais d'un point de vue différent que celui qui est introduit dans les universités.

2 CONNAISSANCES PRÉLIMINAIRES

2.1 Connaissances préliminaires sur π

La constante π, connue aussi sous le nom de la « Constante d'Archimède » est le rapport entre la circonférence d'un cercle par son diamètre.

$$\pi = \frac{C}{d} \tag{2.1}$$

Plusieurs civilisations anciennes ont approximé cette constante, comme les Égyptiens qui l'ont approximé à $\pi = \frac{2^8}{3^4} = 3{,}1605\ldots$ et les Babyloniens à $\pi = 3 + \frac{1}{8} = 3{,}125$. Malgré sa présence dans la nature, ce nombre n'est pas si rudimentaire ; il est en effet un nombre irrationnel, un nombre qui ne peut pas être exprimé sous la forme d'un quotient entre deux nombres entiers. Ce nombre est utilisé pour connaître la puissance d'un ordinateur. Des trillions des chiffres de π ont été calculé durant ce dernier siècle. [1] Ce qui m'intéresse dans ce nombre est qu'à cause de ces apparences dans beaucoup de domaines, je pense qu'il y aura également d'autres domaines dans lesquels il apparaitra ; il peut être en lien avec des problèmes contemporains.

2.2 Début du calcul infinitésimal

Le calcul infinitésimal date depuis l'antiquité, mais la notation usuelle a été mise par Godefroi Leibniz durant la fin du XVIIème siècle. Ce dernier est considéré, avec Newton, comme le père du calcul infinitésimal. L'idée est relativement simple ; établir un lien entre la variation de plusieurs variables ainsi

1. Eric Weisstein. « Pi ». Date de publication inconnue [consulté le 8 mars 2019]. Disponible sur : http://mathworld.wolfram.com/Pi.html

que mesurer l'aire et le volume des objets en étudiant l'effet d'un changement « infiniment petit ». En d'autre mots, comment un changement très petit de x affecte $f(x)$, ou bien, calculer l'aire sous une courbe en utilisant des rectangles dont leur largeur est très petite ; plus la largeur est petite, plus le résultat est précis. [2] Pourtant, ce concept existait dès l'antiquité. En effet, Archimède a appliqué cette idée pour pouvoir approximer π.

2.3 Approximation d'Archimède

Archimède a réussi à encadrer π entre deux nombres rationnels en utilisant une démonstration géométrique :

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7} \tag{2.2}$$

Il a commencé par créer deux hexagones, un circonscrit et l'autre inscrit dans un cercle de diamètre r. Comme π est le rapport entre le circonférence et le diamètre, alors le rapport entre le périmètre et le diamètre du polygone inscrit sera forcément plus petit que π mais forcément plus grand pour le polygone circonscrit, ce qui va lui permettre d'encadrer π entre deux nombres.

En augmentant le nombre des côtés de ces polygones, la différence entre le rapport sera plus petite et par la suite l'intervalle dans lequel nous sommes sûre que π existe sera plus petit. Autrement dit, quand le nombre de côtés de ce polygone approche l'infini, le rapport et l'intervalle vont se rapprocher de π.

Pourtant, ce qu'Archimède a introduit, c'est qu'il n'a pas eu besoin de mesurer chaque fois le périmètre des polygones ; il a pu établir une relation

2. C.H Edwards Jr. *The Historical Development of Calculus*. New York : Springer-Verlag, 1979. « The Calculus According to Leibniz », p231-234.

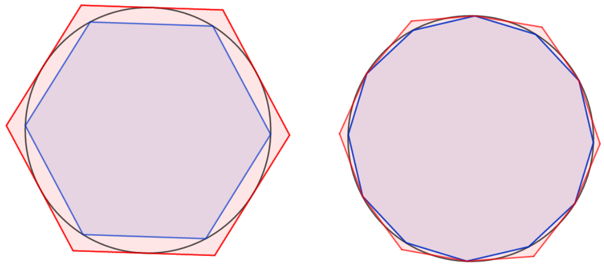

FIGURE 1 – Des polygones inscrits et circonscrits. Polygones de 6 côtés pour la figure de gauche et 12 pour la droite

entre un polygone de n côtés et un polygone de $2n$ côtés. Premièrement, il faut établir une relation entre le polygone circonscrit de n côtés et celui de $2n$ côtés (voir Figure 2). Soient AB le rayon d'un cercle avec BC la tangente au point B et, dans le cas d'un hexagone, $C\widehat{A}B = 30°$ avec AD comme bissectrice de cet angle.

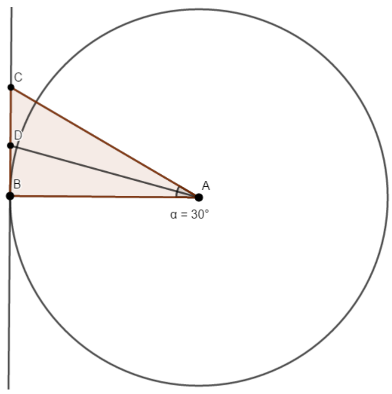

FIGURE 2 – Doubler les côtés d'un polygone circonscrit

Selon proposition 3 du Livre VI de *Les Éléments* d'Euclide, on a :

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{DB} \implies \frac{CA + AB}{AB} = \frac{CD + DB}{DB} = \frac{CB}{DB} \tag{2.3}$$

multiplier par AB ensuite diviser par CB nous donne

$$\frac{CA + AB}{CB} = \frac{AB}{DB} \tag{2.4}$$

Deuxièmement, pour le polygone inscrit (voir Figure 3) avec AD la bissectrice

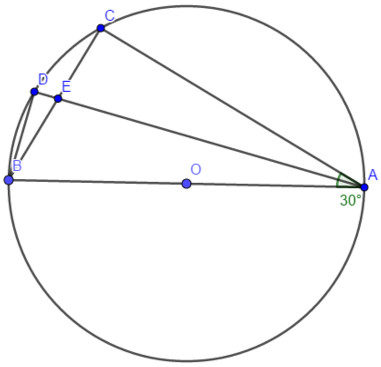

FIGURE 3 – Doubler les côtés d'un polygone inscrit

du triangle, Archimède a établit ce rapport :

$$\frac{AB + AC}{BC} = \frac{AD}{BD} \tag{2.5}$$

En reprenant la bissectrice plusieurs fois (c'est à dire la bissectrice de $B\widehat{A}D$ dans ce cas), nous pouvons par la suite trouver le périmètre des polygones en multipliant le « DB » de chaque nouvelle itération par n. Enfin, Archimède a trouvé une relation de récurrence pour a_{2n} et b_{2n}, qui sont les périmètres des polygones circonscrit et inscrit respectivement avec :

$$a_{2n} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \quad \text{et} \quad b_{2n} = \sqrt{a_{2n} b_n} \tag{2.6}$$

Il ne restait plus qu'à remplacer pour $a_6 = 4\sqrt{3}$ et $b_6 = 6$ (en prenant un exemple d'un cercle de rayon 1) et calculer le rapport entre le périmètre et le diamètre des polygones successives. Archimède est allé jusqu'à un polygone de 96 côtés pour encadrer π entre les valeurs mentionnés au début de cette section. Ce qu'il faut retenir de cette partie c'est qu'Archimède a créé une suite pour approximer π sans avoir besoin de dessiner beaucoup de polygones et cette suite devient de plus en plus précis en augmentant les itérations. [3]

3. J. Arndt et C. Haenel. *Pi Unleashed*. New York : Springer-Verlag, 2001. « Polygons », p.170-184
FGCU. « Archimedes' Approximation of Pi ». 10 juin 1997. - [Consulté le 18 mai 2019]. Disponible sur : https://itech.fgcu.edu/faculty/clindsey/mhf4404/archimedes/archimedes.html
Eric Weisstein.« Archimedes's Reccurence Formula ».Date d'édition inconnue. - [Consulté le 18 mai 2019]. Disponible sur : http://mathworld.wolfram.com/ArchimedesRecurrenceFormula.html

Ce que je vois impressionnant dans cette méthode est même si Archimède n'avait pas la valeur exacte de π, il a pu trouvé une manière de l'approximer d'une telle précision qu'elle suffisait les besoins son époque, comme étant le rapport entre la circonférence et le diamètre d'un cercle.

2.4 L'irrationalité de π

Ironiquement, la constante qui est le rapport entre 2 longueurs ne peut pas être exprimer par un rapport entre deux nombres entiers. L'irrationalité de π était connu depuis l'antiquité mais personne n'a pu la prouver avant Lambert en 1761. Sa preuve est considérée une des preuves les plus intuitives et les plus simples qui prouve l'irrationalité de π. L'idée essentielle sur laquelle il a basé sa preuve est la suivante : « toutes les fois qu'un arc de cercle quelconque est commensurable au rayon, la tangente de cet arc lui est incommensurable ; et que réciproquement, toute tangente commensurable n'est point celle d'un arc commensurable »[4]. Autrement dit, dans la première partie de la preuve, Lambert a prouvé que la tangente de n'importe quel nombre rationnel est irrationnel. Pour commencer, il a exprimé la fonction tangente sous forme d'une fraction continue, qui ont gagnées de la popularité durant ce temps. Il a commencé par :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \tag{2.7}$$

Avec (développement en séries de Taylor en $x = 0$) :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{2.8}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \tag{2.9}$$

4. Johann Lambert. *Histoire de l'Académie royale des sciences et belles-lettres*. Berlin : chez Haude et Spener, libraires de l'Académie royale, 1761. « Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes et logarithmiques », p. 266-267

Remplacer dans l'équation de la tangente nous donne :

$$\tan x = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots} \tag{2.10}$$

On factorise le numérateur par x, ensuite diviser ce x par l'inverse de ce qui reste nous donne :

$$\tan x = x\frac{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots} = \frac{x}{\frac{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots}{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots}} \tag{2.11}$$

Additionner puis soustraire le dénominateur (du dénominateur) au numérateur (du dénominateur) pour éliminer le 1 et donc pouvoir factoriser par x^2 (après la simplification) :

$$\tan x = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots \frac{- \frac{2x^2}{3!} + \frac{4x^4}{5!} - \frac{6x^6}{7!} + \cdots}{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots}} = \frac{x}{1 - x^2\frac{\frac{1}{3} - \frac{x^2}{5\times 3!} + \frac{x^4}{7\times 5!} - \frac{x^6}{9\times 7!} + \cdots}{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots}} \tag{2.12}$$

En changeant encore la forme on a :

$$\tan x = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{\frac{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \cdots}{\frac{1}{3} - \frac{x^2}{5\times 3!} + \frac{x^4}{7\times 5!} - \frac{x^6}{9\times 7!} + \cdots}}} \tag{2.13}$$

Pour éliminer la constante au numérateur, on additionne puis soustrait 3 fois le dénominateur pour obtenir :

$$\tan x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3(\frac{1}{3} - \frac{x^2}{5\times3!} + \frac{x^4}{7\times5!} - \frac{x^6}{9\times7!} + \cdots) \cfrac{- \frac{2x^2}{5\times3!} + \frac{4x^4}{7\times5!} - \frac{6x^6}{9\times7!} + \cdots}{\frac{1}{3} - \frac{x^2}{5\times3!} + \frac{x^4}{7\times5!} - \frac{x^6}{9\times7!} + \cdots}}} \tag{2.14}$$

Ce qui simplifie à :

$$\tan x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - x^2 \cfrac{\frac{1}{15} - \frac{x^2}{35\times3!} + \frac{x^4}{63\times5!} - \cdots}{\frac{1}{3} - \frac{x^2}{5\times3!} + \frac{x^4}{7\times5!} - \frac{x^6}{9\times7!} + \cdots}}} \tag{2.15}$$

Répéter ces étapes va permettre à Lambert d'exprimer la fonction tangente sous la forme d'une fraction continue :

$$\tan x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \ddots}}}} \tag{2.16}$$

Comme avec les séries de Taylor, cette fraction tend vers la fonction tangente plus on inclue de termes. Dans la deuxième partie, Lambert a réussit à prouver cette égalité en trouvant la forme générale mais ceci ne présente pas beaucoup d'intérêts pour ce mémoire. Dans la troisième partie, Lambert a prouvé par contradiction que n'importe quelle nombre rationnel $\frac{u}{v}$, $\tan\frac{u}{v}$ est irrationnel. Pourtant, $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ (qui est rationnel), ce qui implique que $\frac{\pi}{4}$ ne peut pas être écrit sous forme d'une fraction $\frac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}^+$. Ce qui implique que π est irrationnel.[5] Je vois que cette démonstration montre également la flexibilité des mathématiques car elle utilise les fractions continues pour prouver l'irrationalité d'un nombre qui est définie originalement dans la géométrie, ce qui montre que les différentes branches mathématiques sont complémentaires.

Pour exprimer un nombre irrationnel, les mathématiciens ont plusieurs choix. Un nombre irrationnel peut être exprimé sous forme d'un produit à l'infini comme le produit à l'infini de π découvert en 1655 par John Wallis[6],

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n-1}\times\frac{2n}{2n+1}\right)=\frac{2}{1}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{5}\times\frac{6}{7}\times\cdots=\frac{\pi}{2} \tag{2.17}$$

ou bien sous forme de fraction continue comme celle qui a été découverte par William Brouncker dans les années 1660,[7]

$$\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\ddots}}} \tag{2.18}$$

ou bien sous forme de séries comme celle de Leibniz qui sera explorée dans la section suivante.

5. Bulckard Poster. « Pi is IRRATIONAL : animation of a gorgeous proof ». 23 décembre 2017 - [Consulté le 28 février 2019]. Disponible sur : https://www.youtube.com/watch?v=Lk_QF_hcM8A
Johann Lambert. *Histoire de l'Académie royale des sciences et belles-lettres*. Berlin : chez Haude et Spener, libraires de l'Académie royale, 1761. « Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes et logarithmiques », p. 265-322

6. Eric Weisstein et Jonathan Sondow. « Wallis Formula ». Date d'édition inconnue. - [Consulté le 21 juillet 2019]. Disponible sur : http://mathworld.wolfram.com/WallisFormula.html

7. Michael Huberty, Ko Hayashi et Chia Vang. « Infinite expressions for Pi ». 6 juillet 1997. - [Consulté le 21 juillet 2019]. Disponible sur : http://www.geom.uiuc.edu/~huberty/math5337/groupe/expresspi.html

2.5 Série de Leibniz

Cette série est aussi nommée Madhava-Leibniz car elle a été découverte durant le XIVème siècle par Madhava et aussi indépendamment découverte par Leibniz dans les années 1670.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4} \tag{2.19}$$

Cette série sera utilisée dans ce mémoire et donc je vois qu'il est nécessaire d'explorer cette série. Ce que je vois pertinent et intéressant dans cette série est la démonstration géométrique que Leibniz a fait. Sa démonstration consiste à trouver une autre expression pour l'aire sous le quart d'un cercle de rayon 1, (qui est de mesure $\frac{\pi}{4}$). Leibniz donc, comme étant le père de l'intégration, a choisi d'intégrer un quart de cercle de rayon $OA = 1$. Leibniz a remarqué qu'il peut seulement intégrer l'aire entre le segment OT et l'arc OT car l'aire du triangle $OAT = 1/2$.

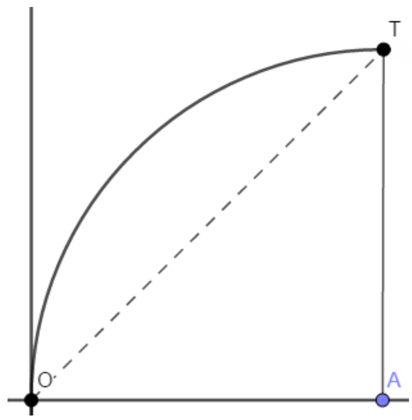

FIGURE 4 – Quart d'un cercle divisé en un triangle et une aire C (limitée par l'arc OT et la corde OT

Considérons le triangle OPQ (voir figure 5). Le but de Leibniz est d'intégrer OPQ tout au long de l'aire C. Soient P et Q deux points infiniment proche sur l'arc avec une distance $PQ = ds$. Ensuite, soient OR la hauteur issue de P,

S l'intersection entre Oy et QR et OPQ un triangle avec une aire infinitésimale.

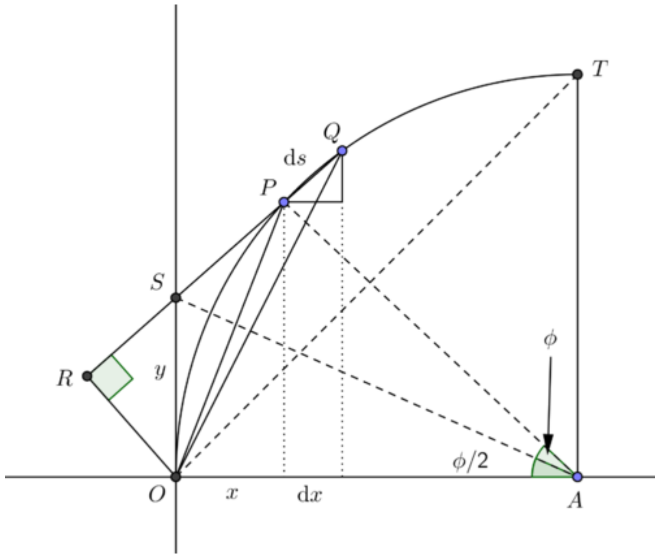

FIGURE 5 – Quart d'un cercle sur un repère [8]

On peut donc exprimer dC comme étant l'aire de OPQ

$$dC = \frac{OR \times PQ}{2} = \frac{OR \times ds}{2} \tag{2.20}$$

Leibniz a également remarqué que ORS et le petit triangle sur PQ sont semblables ($\widehat{P} = \widehat{O}$, $\widehat{Q} = \widehat{S}$ et ils sont rectangles), donc

$$\frac{ds}{dx} = \frac{OS}{OR} \iff OR \times ds = OS \times dx \tag{2.21}$$

Alors

$$dC = \frac{OS \times dx}{2} = \frac{ydx}{2} \tag{2.22}$$

Pour $y = f(x) = OS$. Ensuite Leibniz a noté l'abscisse de $P = x$ et il a intégré le suivant

$$C = \frac{1}{2}\int_0^1 ydx \tag{2.23}$$

8. Collectif. « Leibniz's Formula for Pi ». 8 décembre 2018. - [Consulté le 5 mai 2019]. Disponible sur : https://proofwiki.org/wiki/Leibniz%27s_Formula_for_Pi

Après l'intégration part partie on obtient

$$C = \left[\frac{1}{2}xy\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{2}dy = \frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{x}{2}dy \tag{2.24}$$

Il faut remarquer graphiquement pour $x = 1$, $y = 1$. SPA et SOA sont isométriques, car $OA = AP$ (rayon du cercle), $\widehat{O} = \widehat{P} = 90°$ et donc

$$OS^2 = SA^2 - OA^2 = SA^2 - AP^2 = SP^2 \implies OS = SP \tag{2.25}$$

Ce qui implique que SA est la bissectrice de l'angle ϕ. Leibniz a cherché une manière afin relier x et y et il a utilisé de la trigonométrie pour ceci. Leibniz a

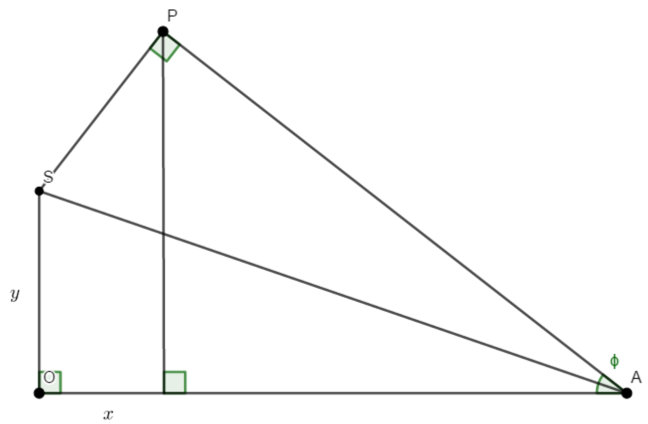

FIGURE 6 – Relation trigonométrique entre x et y

remarqué que $y = \tan\frac{\phi}{2}$ et $x = 1-\cos\phi = 2\sin^2\frac{\phi}{2}$ (voir Figure 6), en manipulant les formules on obtient :

$$\tan^2\frac{\phi}{2} = \frac{\sin^2\frac{\phi}{2}}{\cos^2\frac{\phi}{2}} = \sin^2\frac{\phi}{2}\sec^2\frac{\phi}{2} = \sin^2\frac{\phi}{2}\left(1+\tan^2\frac{\phi}{2}\right) \tag{2.26}$$

En remplaçant par x et y on obtient :

$$y^2 = \frac{x}{2}\left(1+y^2\right) \iff \frac{x}{2} = \frac{y^2}{1+y^2} \tag{2.27}$$

Ceci ne semble pas à grand chose mais en fait c'est la somme d'une série géométrique avec $U_1 = y^2$ et une raison $r = -y^2$. Autrement dit

$$\frac{y^2}{1+y^2} = y^2 - y^4 + y^6 - y^8 + \cdots \tag{2.28}$$

En remplaçant les équations 2.27 et 2.28 dans l'équation 2.24 on obtient :

$$C = \frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{y^2}{1+y^2}dy = \frac{1}{2} - \int_0^1 \left(y^2 - y^4 + y^6 - y^8 + \cdots\right) dy \tag{2.29}$$
$$= \frac{1}{2} - \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5} + \frac{y^7}{7} - \frac{y^9}{9} + \cdots\right]_0^1 \tag{2.30}$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots \tag{2.31}$$

En additionnant l'aire du triangle OAT à C, on obtient la série de Leibniz qui converge à $\frac{\pi}{4}$ (voir équation 2.19). Ce que je vois pertinent dans cette démonstration est la manière dont Leibniz a établi les relations entre un quart de cercle, la géométrie, la trigonométrie et l'intégration pour montrer qu'il y a une relation entre π et la série alternée de l'inverse de tout les nombre impaires [9].

Pourtant, cette série est rarement utilisée pour approximer la valeur de π car elle converge très lentement, pour calculer la valeur de π correctement jusqu'à 100 chiffres décimaux il faut 10^{100} termes [10]. Cependant, il y a une propriété qui est intéressante dans la série de Leibniz ; même s'il y a une erreur dans un chiffre la fonction continue avec plusieurs autres chiffres corrects, pre-

9. C.H. Edwards Jr. *The Historical Development of Calculus*. New York : Springer-Verlag, 1979. « Transmutation and the Arithmetical Quadrature of the Circle », p245-248
Collectif. « Leibniz's Formula for Pi ». 8 décembre 2018. - [Consulté le 5 mai 2019]. Disponible sur : https://proofwiki.org/wiki/Leibniz%27s_Formula_for_Pi
Donny Lee. « Leibniz quest for Pi ». 25 août 2007 - [Consulté le 21 juillet 2019]. Disponible sur : https://www.youtube.com/watch?v=GAkkTa2XpEc

10. J. Arndt et C. Haenele. *Pi Unleashed*. New York : Springer-Verlag, 2001. « Almost but not quite », p156

nons l'exemple de la somme des 50 000 premiers termes

$$4\sum_{k=0}^{50000}\frac{(-1)^k}{2k+1} = 3{,}1415\underline{7}26535897\underline{9}5238462643\underline{2}38327950\ldots$$

$$\text{avec } \pi = 3{,}14159265358979323846264338327950\ldots$$

Les chiffres soulignées sont les chiffres erronés. Cette propriété a été découverte en 1987 avec des logiciels. Les frères Borwein et K. Dilcher ont pu trouvé la somme de tout les termes après le $N/2$ème pour pouvoir calculer les erreurs dans la série avec N divisible par 4

$$\pi - 4\sum_{k=0}^{N/2}\frac{(-1)^k}{2k+1} \sim \sum_{m=0}^{\infty}\frac{2\times E_{2m}}{N^{2m+1}} \tag{2.32}$$

$$= \frac{2}{N} - \frac{2}{N^3} + \frac{10}{N^5} - \frac{122}{N^7} + \frac{2770}{N^9} - \ldots \tag{2.33}$$

et E_{2m} sont les nombres d'Euler paires, qui sont une suite des nombres entiers qui apparait également en mathématiques combinatoires et aussi dans certaines développement en séries de Taylor. Dans l'exemple précédent, la valeur de N est 10^5 et donc en remplaçant dans l'équation 2.33,

$$\frac{2}{10^5} - \frac{2}{10^{15}} + \frac{10}{10^{25}} - \frac{122}{10^{35}} + \frac{2770}{10^{45}} - \ldots \tag{2.34}$$

Ceci signifie qu'il y a une erreur dans le 5ème chiffre après la virgule de +2, le 15ème de –2, le 25ème de +10, etc [11]. Ce développement permet donc de pouvoir approximer plus π dans un temps beaucoup plus raisonnable.

11. Jonathan Borwein, David Bailey et Roland Girgensohn. *Experimentation in Mathematics - Computational Paths to Discovery*. New York : CRC Press, 2004. « Continued Fractions of Tails of Series », p.28-30.
J. Arndt et C. Haenel. *Pi Unleashed*. New York : Springer-Verlag, 2001. « Almost but not quite », p156-157.

3 RELATION ENTRE π ET LA DISTRIBUTION DES NOMBRES PREMIERS

Grant Sanderson, connu sur l'internet sous le nom de « 3Blue1Brown », a publié une vidéo le 19 mai 2017 intitulée « Quand pi se cache dans la répartition des nombres premiers [12] » dans lequel il montre la relation entre π, les nombres complexes et les nombre premiers. Le but de sa vidéo est de montrer comment plusieurs outils de différentes origines (π ayant une origine dans la géométrie, les nombres premiers dans la théorie des nombres et les nombre complexes dans l'algèbre) sont reliés dans les mathématiques modernes, notamment dans la théorie analytique des nombres, une branche qui utilise l'analyse pour résoudre des problèmes de maths discrètes. La méthode qu'il a utilisé consiste de trouver une manière systématique de calculer l'aire d'un cercle sur le plan complexe.

3.1 Mesurer l'aire d'un cercle

Sanderson est convaincu que quand π apparait dans une série ou une équation, il y a toujours un cercle caché. Il a commencé donc par trouver une différente façon de mesurer l'aire d'un cercle de rayon R. Une manière primitive est de compter les carreaux dans le cercle mais ceci porte un grand manque de précision quand le rayon est petit. Pourtant, à la limite, quand le rayon s'approche de l'infini, le nombre des carreaux se rapprochera de plus en plus vers l'aire du cercle. En autre mots, Sanderson a calculé l'aire du cercle en utilisant le même concept qu'Archimède a utilisé pour approximer π, qui est également le même concept du calcul infinitésimal, mais appliquée différemment.

12. Grant Sanderson. « Pi hiding in prime regularities ». 19 mai 2017 - [Consulté le 9 janvier 2019]. Disponible sur : https://www.youtube.com/watch?v=NaL_Cb42WyY

Une autre supposition que Sanderson a fait est de remplacer le fait de compter les carreaux par compter le nombre des points réseaux, les points d'intersection entre les quadrillages (voir Figure 7), ce qui créer une incertitude dans les cercles avec un petit rayon, mais avec un rayon assez grand, le nombre de points réseaux, le nombre de carreaux et l'aire se rapprocheront.

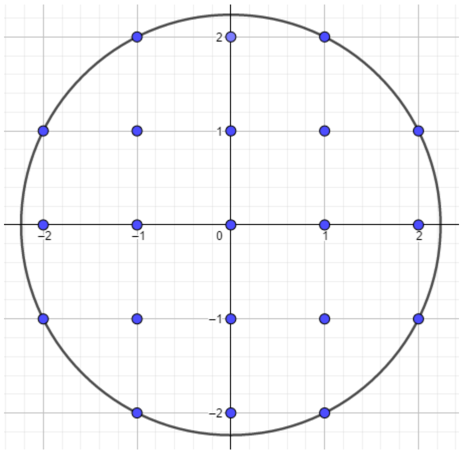

FIGURE 7 – Cercle avec un rayon de $\sqrt{5}$ et les points réseaux

En autres mots, les points réseaux sont les points de coordonnées $(x; y)$ avec $x, y \in \mathbb{Z}$. Ceci donc montre que la distance entre un point réseau et l'origine est $\sqrt{x^2 + y^2}$. Sanderson s'est intéressé plus précisément sur les points réseaux qui sont sur le cercle, car pour un disque D de rayon $\sqrt{N}$ avec $N \in \mathbb{Z}^+$

$$\text{Points réseaux dans } D = \sum_{i=0}^{N} \text{Points réseaux sur le cercle de rayon } \sqrt{i} \quad (3.1)$$

Voici le tableau des premiers points réseaux des cercles de rayon $\sqrt{N}$ pour $N \in \mathbb{Z}^+$ et P le nombre des points réseaux sur le cercle.

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
P	4	4	0	4	8	0	0	4	4	8	0	0	8	0	0	4	8

Tableau 1 – Liste des nombres de points réseaux en fonction de rayon du cercle

Les nombres des points réseaux semblent un peu arbitraire (voir Tableau 1). Pourtant, selon Sanderson, c'est dans ces cas où les mathématiques prouvent leur beauté. Par exemple, un cercle de rayon $\sqrt{5}$ (voir Figure 7) passera des coordonnées (2 ;1), (1 ;2), (–1 ;2), (–2 ;1), etc.

3.2 Sur le plan complexe

Selon Sanderson, quand il y a un problème sur un plan Euclidien, il est toujours fructueux de réfléchir à ce problème sur le plan complexe. Ceci permettra de pouvoir manipuler encore mieux les coordonnées pour trouver une manière systématique de compter les nombres de points réseaux. Prenons encore l'exemple du cercle de rayon $\sqrt{5}$ avec $5 = 2^2 + 1^2$. Ceci peut donc être factorisé à $(2+i)(2-i)$, $(1+2i)(1-2i)$, etc. Dans ce cas, les points réseaux peuvent être exprimés en étant des « Entiers de Gauss », qui sont défini comme l'ensemble

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi | a, b \in \mathbb{Z}\} \tag{3.2}$$

Travailler avec les entiers de Gauss est similaire que travailler avec des nombres complexes, la seule différence dans la définition est la norme N qui est définie [13]

$$N(a + bi) = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 \tag{3.3}$$

3.3 Factorisation des nombres premiers

Certains nombres premiers dans $\mathbb{N}$ comme 5,13,17 et 29 ne sont pas des nombres premiers dans les entiers de Gauss car ils peuvent être factorisés avec des nombres complexes. Ces nombres premiers sont des nombres qui peuvent être exprimés en étant la somme des deux carrés. Autrement dit, pour

13. John Conway et Richard Guy. *The Book of Numbers*. New York : Springler-Verlag, 1996. « Imagining Imaginary Numbers », p.211-235

certains nombres premiers p

$$p = a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi) = (b + ai)(b - ai) \tag{3.4}$$

Pourtant, d'autres nombres premiers restent non-factorisables, comme 3, 11, 19 et 23, même dans le plan complexe. Cette propriété des nombre premiers qui peuvent être factorisés en utilisant des entiers complexes jouera un grand rôle pour explorer et trouver la relation entre π et ces nombres premiers. Cependant, nous pouvons remarquer que les cercles qui ont comme rayon $\sqrt{3}$ ou $\sqrt{11}$, ou d'autres nombre premiers non-factorisables, ne passent sur aucun point réseau. Plusieurs mathématiciens ont exploré cette propriété comme Fermat, qui a établit un théorème pour reconnaitre ces nombres.

3.4 Théorème des deux carrés de Fermat

Ce théorème des deux carrés de Fermat énonce que pour un nombre premier $p > 2$ et $a, b, k \in \mathbb{Z}^+$

$$p = a^2 + b^2 \iff p = 4k + 1 \tag{3.5}$$

Fermat n'a pas prouvé ce théorème et la première démonstration était celle d'Euler mais je l'ai trouvé compliquée et nécessite un haut niveau de maturité mathématique et donc j'ai cherché une démonstration moins compliqué et plus appropriée pour ce mémoire : la deuxième démonstration de Richard Dedekind, un grand mathématicien du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, qui utilise les entiers de Gauss.

La direction $\Rightarrow$ est facile à prouver : un carré parfait x peut être de la forme $4q^2$ si x est pair ou $4(q^2 + q) + 1$ s'il est impair et donc la somme des deux carrés parfait modulo 4 ne peut être que 0, 1 ou 2. Autrement dit, pour un nombre impaire qui est la somme des deux carrés, il doit être de la forme $4k + 1$.

L'autre direction $\Leftarrow$ est plus difficile à prouver et c'est où Dedekind a démontré cette assertion en utilisant les entiers de Gauss. Il a commencé par montrer qu'un nombre premier $p = 4k+1$ peut diviser m^2+1. Ceci est équivalent à dire : Est-ce qu'il y a un nombre m^2 qui donne un reste de $p-1$ quand divisé par p ? Autrement dit en notation d'arithmétique modulaire

$$m^2 \equiv -1 \pmod p \tag{3.6}$$

Heureusement, le Critère d'Euler [14] est un critère qui permet de connaitre pour un entier q relativement premier à p

$$q^{\frac{p-1}{2}} \equiv \begin{cases} 1 \pmod p \text{ s'il y a un entier } m \text{ où } q \equiv m^2 \pmod p \\ -1 \pmod p \text{ Sinon} \end{cases} \tag{3.7}$$

Remplaçant pour $q = -1$ et $p = 4k + 1$ donne

$$(-1)^{\frac{4k+1-1}{2}} = (-1)^{2k} = 1 \tag{3.8}$$

Ce qui implique que $p|m^2+1$ avec $m^2+1 = (m+i)(m-i)$. Pourtant, p ne divise pas les facteurs de m^2+1 (il ne divise pas les parties imaginaires) alors p n'est pas premier dans les entiers de Gauss et peut donc être uniquement factorisé. La norme d'un entier de Gauss est multiplicative ($N(n)N(m) = N(mn)$, comme dans $\mathbb{C}$) et donc

$$N(p) = N(x_1)N(x_2)\dots N(x_i) = p^2 \tag{3.9}$$

$N(x_i)$ ne peut être égale qu'à p ou p^2 (une factorisation unique n'inclue pas $N(x_i) = 1$). Mais il y a au moins 2 facteurs et donc avoir une norme de p^2

14. Thomas et Joseph Dence. *Elements of the Theory of Numbers*. Massachusetts : Harcourt Academic Press, 1999. « Theorem 6.4, Chap 6. Residues », p.197

est une contradiction et alors il y a exactement 2 facteurs en forme de $p = (a+bi)(a-bi) \implies p = a^2 + b^2$.[15] En revanche, si $p = 4k+3$, il est possible de prouver qu'il n'y pas un entier m pour $m^2 \equiv -1 \pmod{p}$ en utilisant le critère d'Euler.

$$(-1)^{\frac{4k+3-1}{2}} = (-1)^{2k+1} = -1 \tag{3.10}$$

Ceci m'a permis de comprendre et a servit à renforcer ma connaissance d'un argument de forme « si et seulement si ».

3.5 Estimation des nombres de points réseaux

Un nombre premier de forme $4k+1$ peut être factorisé de 2 manières différentes $(a+bi)(a-bi)$ et $(b+ai)(b-ai)$. Pourtant, ces points réseaux existent également selon les symétries axiales de O_x et O_y. Autrement dit, si $a+bi$ est sur le cercle, alors $ai-b$, $-a-bi$ et $-ai+b$ sont également sur le cercle ; il suffit de multiplier par 1, i, –1 et $-i$ respectivement.

Dans sa présentation, Sanderson a exploré les propriétés de ces nombres pour pouvoir calculer les nombres de réseaux seulement avec la décomposition du nombre en facteurs premiers.

1. Les nombres premiers de forme $4k+3$ doivent avoir une puissance paire pour avoir des points réseaux.
2. Multiplier par des puissances de 2 ne change pas le nombre des points réseaux.
3. Chaque nombre premier de forme $4k+1$ ajoutera un point réseau qui aura ses cousins qui sont multipliés par $i, -i$ et –1.

15. Peter Dirichlet et Richard Dedekind. *Vorlesungen über Zahlentheorie*. Braunschweig : Friedrich Vieweg und Sohn, 1894. « Über die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen », p.434-452

4. Chaque nombre premier p^n de forme $4k + 1$ ajoute $4(n + 1)$ points réseaux.
5. Pour trouver le nombre des points réseaux, il suffit de multiplier le nombre de points réseaux ajouté pour chaque nombre premier.

Propriétés 1 à 3 ont été prouvé rigoureusement sur $p = a^2 + b^2$ par Euler [16] et 4 à 5 ont été remarqué par Sanderson. Il est bien de remarquer que la raison pour laquelle multiplier par 2 ne change pas le nombre de points réseaux est intéressante. $2 = (1+i)(1-i)$ et donc l'angle entre les facteurs de 2 est un angle droit. Autrement dit, il suffit de multiplier par i ou $-i$ pour avoir l'autre facteur, ce qui est déjà pris en compte ci-dessus.

Prenons l'exemple $50 = 2 \times 5^2$. Suivant ces propriétés, il y a $4(3) = 12$ points réseaux. Un autre exemple $49725 = 5^2 \times 3^2 \times 13 \times 17$ aura donc $4(3)(2)(2) = 48$ points réseaux. Pourtant $1100 = 2^2 \times 5^2 \times 11$ n'a pas de points réseaux, car il contient un nombre premier de forme $4k+3$ avec une puissance impaire. Donc les cercles de rayon $\sqrt{50}$ ou $\sqrt{49725}$ auront des points réseaux mais pas $\sqrt{1100}$.

3.6 Caractère de Dirichlet

Pour pouvoir systématiser le nombre des points réseaux,il suffit d'utiliser un outil présent dans la théorie analytique des nombres : le Caractère de Dirichlet modulo 4. Ce caractère n'est rien d'autre qu'une fonction multiplicative

16. Leonhard Euler. « De numeris, qui sunt aggregata duorum quadratorum » dans *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* : St. Petersbourg Academy, 1758. Vol 4, p.3-40

défini

$$\chi(n) = \begin{cases} 0, \text{pour } n \text{ paire} \\ 1, \text{pour } n = 4k+1 \\ -1, \text{pour } n = 4k+3 \end{cases} \tag{3.11}$$

En prenant l'exemple de $450 = 2 \times 3^2 \times 5^2$, on peut voir qu'il y a $4(1)(1)(3)$ points réseaux. Ce que Sanderson a pu remarqué qu'on peut également substituer ces facteurs premiers par χ de toutes les puissances jusqu'à la puissance présente, donc pour trouver le nombre des points réseaux de 450, on peut additionner les options comme ceci $4(\chi(1)+\chi(2))(\chi(1)+\chi(3)+\chi(3^2))(\chi(1)+\chi(5)+\chi(5^2)) = 4(1+0)(1-1+1)(1+1+1)$. Prenant un autre exemple pour $45 = 3^2 \times 5^2$ avec le nombre des points réseaux $4(\chi(1)+\chi(3)+\chi(3^2))(\chi(1)+\chi(5)+\chi(5^2))$, en développant et car χ est multiplicative, on peut simplifier à $4(\chi(1)+\chi(3)+\chi(5)+\chi(9)+\chi(15)+\chi(45))$. Donc pour un nombre $n = p_1^k \times p_2^l \times \cdots \times p_q^m$, le nombre des points réseaux, $4(\chi(p_1^0)+\chi(p_1^1)+\cdots+\chi(p_1^k))(\chi(p_2^0)+\chi(p_2^1)+\cdots+\chi(p_2^l))\ldots(\chi(p_q^0)+\chi(p_q^1)+\cdots+\chi(p_q^m))$, est la somme des fonctions χ de tous les diviseurs de n multipliée par 4. [17]

3.7 Bilan

Revenons au problème essentiel, trouver une méthode systématique pour calculer l'aire d'un cercle autre que πR^2 pour donner une relation d'équivalence à la limite. La méthode de Sanderson calcule le nombre des points réseaux car il est équivalent à l'aire à la limite. Il suffit seulement d'additionner les nombres de point réseaux pour $\sqrt{n}$ avec $n \in \mathbb{Z}^+$ jusqu'à R^2. Ceci revient à appliquer χ sur tout les diviseurs de n ensuite additionner tout et multiplier par 4. Quand R^2 tend vers l'infini, il faut compter combien de fois $\chi(n)$ apparait.

17. Lokenath Debnath. *The Legacy of Leonhard Euler - A Tricentennial Tribute*. London : Imperial College Press, 2009. « Euler's Zeta Function », p.210-223

Pour $n = 1$ il apparait R^2 fois, $\chi(2)$ apparait $R^2/2$ fois, $\chi(3)$ apparait $R^2/3$ fois, etc. Il ne faut pas oublier que ceci devient exacte seulement quand $R^2 \to \infty$ (voir Figure 8).

$$
\begin{array}{ll}
\sqrt{1} & \Rightarrow 4\big(\chi(1)\big) \\ \hline
\sqrt{2} & \Rightarrow 4\big(\chi(1)+\chi(2)\big) \\ \hline
\sqrt{3} & \Rightarrow 4\big(\chi(1)+\chi(3)\big) \\ \hline
\sqrt{4} & \Rightarrow 4\big(\chi(1)+\chi(2)+\chi(4)\big) \\ \hline
\sqrt{5} & \Rightarrow 4\big(\chi(1)+\chi(5)\big) \\ \hline
\sqrt{6} & \Rightarrow 4\big(\chi(1)+\chi(2)+\chi(3)+\chi(6)\big) \\ \hline
\sqrt{7} & \Rightarrow 4\big(\chi(1)+\chi(7)\big) \\ \hline
\sqrt{8} & \Rightarrow 4\big(\chi(1)+\chi(2)+\chi(4)+\chi(8)\big) \\ \hline
\sqrt{9} & \Rightarrow 4\big(\chi(1)+\chi(3)+\chi(9)\big) \\ \hline
\sqrt{10} & \Rightarrow 4\big(\chi(1)+\chi(2)+\chi(5)+\chi(10)\big) \\ \hline
\sqrt{11} & \Rightarrow 4\big(\chi(1)+\chi(11)\big) \\ \hline
\sqrt{12} & \Rightarrow 4\big(\chi(1)+\chi(2)+\chi(3)+\chi(4)+\chi(6)+\chi(12)\big) \\ \hline
\vdots & \\ \hline
\sqrt{R^2} &
\end{array}
$$

FIGURE 8 – Illustration des nombres des points réseaux

Donc on peut dire qu'à la limite

$$\pi R^2 = 4\left(R^2\chi(1) + \frac{R^2}{2}\chi(2) + \frac{R^2}{3}\chi(3) + \frac{R^2}{4}\chi(4) + \dots\right) \tag{3.12}$$

factoriser par R^2 et simplifier nous donne

$$\pi = 4\left(\chi(1) + \frac{\chi(2)}{2} + \frac{\chi(3)}{3} + \frac{\chi(4)}{4} + \frac{\chi(5)}{5} + \dots\right) \tag{3.13}$$

ce qui est enfin

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \cdots\right) \tag{3.14}$$

qui n'est que la série de Leibniz.

La raison pour laquelle j'aime faire des recherches en mathématiques est vraiment à cause des situations comme ceci. Leibniz a démontré sa série en utilisant du calcul infinitésimal ; des mathématiques continues. Pourtant, cette même série peut être démontrée en utilisant des mathématiques discrètes, ce qu'a fait Sanderson. Ceci sert à prouver à quelle point les branches mathématiques sont complémentaires et comment le concept de la limite à l'infini peut être également appliqué dans les mathématiques discrètes.

4 CONCLUSION

Pour répondre à la question de recherche « Quelle est la relation entre π, la série de Leibniz et la distribution des nombres premiers ? », on peut voir la série de Leibniz en étant le résultat du lien entre π et la distribution des nombres premiers ; car la manière dont les nombres premiers de forme $4k + 1$ peuvent être factorisés dans les entiers de Gauss mais ceux de forme $4k+3$ ne peuvent pas, avec l'introduction du caractère de Dirichlet, nous permet d'atteindre ce résultat. En plus, le fait que π est irrationnel peut être considéré comme une conséquence de la configuration des nombres premiers dans les nombres entiers. Pourtant, la méthode de Sanderson contient relativement moins de rigueur que les autres preuves qui existent mais elle est assez élégante et montre la connexion entres plusieurs domaines dans les mathématiques et comment on peut se servir des outils de plusieurs domaines pour arriver à une grand conclusion dans un autre domaine.

Pourtant, on peut s'interroger s'il y a d'autres connexions entre π et la distribution des nombres premiers, et même peut être des relations directes entre π et les nombres premiers. Ceci est une question pertinente à se poser et en effet, cette question est traitée dans la théorie analytique des nombres et il est sûre que plusieurs mathématiciens ont fait des recherches sur cette question.

5 BIBLIOGRAPHIE

Livres

ARNDT, J. et HAENEL, C. *Pi Unleashed*. New York : Springer-Verlag, 2001. « Almost but not quite », p156-157

ARNDT, J. et HAENEL, C. *Pi Unleashed*. New York : Springer-Verlag, 2001. « Polygons », p170-184

BORWEIN, Jonathan, BAILEY, David et GIRGENSOHN, Roland. *Experimentation in Mathematics - Computational Paths to Discovery*. New York : CRC Press, 2004. « Continued Fractions of Tails of Series », p.28-30.

CONWAY, John et GUY, Richard. *The Book of Numbers*. New York : Springler-Verlag, 1996. « Imagining Imaginary Numbers », p.211-235

DEBNATH, Lokenath. *The Legacy of Leonhard Euler - A Tricentennial Tribute*. London : Imperial College Press, 2009. « Euler's Zeta Function », p.210-223

DENCE, Thomas et Joseph. *Elements of the Theory of Numbers*. New York : Harcourt Academic Press, 1999. « Theorem 6.4, Chap 6. Residues », p.197

DIRICHLET, Peter et DEDEKIND, Richard. *Vorlesungen über Zahlentheorie*. Braunschweig : Friedrich Vieweg und Sohn, 1894. « Über die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen », p.434-452

EDWARDS Jr, C.H. *The Historical Development of Calculus*. New York : Springer-Verlag, 1979. « The Calculus According to Leibniz », p231-234.

EDWARDS Jr, C.H. *The Historical Development of Calculus*. New York : Springer-Verlag, 1979. « Transmutation and the Arithmetical Quadrature of the Circle », p245-248

LAMBERT, Johann. *Histoire de l'Académie royale des sciences et belles-lettres*. Berlin : chez Haude et Spener, libraires de l'Académie royale, 1761. « Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes et logarithmiques », p. 265-322

Encyclopédies

EULER, Leonhard. « De numeris, qui sunt aggregata duorum quadratorum » dans *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* : St. Petersbourg Academy, 1758. Vol 4, p.3-40

Sites Web

COLLECTIF. « Leibniz's Formula for Pi ». 8 décembre 2018. - [Consulté le 5 mai 2019]. Disponible sur : https://proofwiki.org/wiki/Leibniz%27s_Formula_for_Pi

FGCU. « Archimedes' Approximation of Pi ». 10 juin 1997. - [Consulté le 18 mai 2019]. Disponible sur : https://itech.fgcu.edu/faculty/clindsey/mhf4404/archimedes/archimedes.html

HUBERTY, Michael, HAYASHI, Ko et VANG, Chia. « Infinite expressions for Pi ». 6 juillet 1997. - [Consulté le 21 juillet 2019]. Disponible sur : http://www.geom.uiuc.edu/~huberty/math5337/groupe/expresspi.html

WEISSTEIN, Eric. « Archimedes's Reccurence Formula ». Date d'édition inconnue. - [Consulté le 18 mai 2019]. Disponible sur : http://mathworld.wolfram.com/ArchimedesRecurrenceFormula.html

WEISSTEIN, Eric. « Pi ». Date d'édition inconnue. - [Consulté le 8 mars 2019]. Disponible sur : http://mathworld.wolfram.com/Pi.html

WEISSTEIN, Eric et SONDOW, Jonathan. « Wallis Formula ». Date d'édition inconnue. - [Consulté le 21 juillet 2019]. Disponible sur : http://mathworld.wolfram.com/WallisFormula.html

Vidéos en ligne

LEE, Donny. « Leibniz quest for Pi ». 25 août 2007 - [Consulté le 21 juillet 2019]. Disponible sur : https://www.youtube.com/watch?v=GAkkTa2XpEc

POSTER, Bulckard. « Pi is IRRATIONAL : animation of a gorgeous proof ». 23 décembre 2017 - [Consulté le 28 février 2019]. Disponible sur : https://www.youtube.com/watch?v=Lk_QF_hcM8A

SANDERSON, Grant. « Pi hiding in prime regularities ». 19 mai 2017 - [Consulté le 9 janvier 2019]. Disponible sur : https://www.youtube.com/watch?v=NaL_Cb42WyY